

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕПЛОСКИХ ЭКРАНАХ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ КРЫШЕК¹

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на неплоском экране, расположенном в свободном пространстве. Задача сведена к интегральному уравнению. Построен метод Галеркина для решения интегрального уравнения с использованием функций «крышек». Рассмотрено применение субиерархического метода для решения интегрального уравнения. Представлены численные результаты.

Ключевые слова: задача дифракции, интегральное уравнение, субиерархический метод, численные результаты.

Abstract. The article considers a problem of electromagnetic wave diffraction on a nonplanar screen located in free space. The problem is reduced to an integral equation. The author has applied the Galerkin method for solving integral equation with the “Rooftop” basic functions. The article also considers the application of the subhierarchical method for solving integral equations and introduces the numerical results.

Key words: diffraction problem, integral equation, subhierarchical method, numerical results.

Введение

Настоящая работа посвящена численному исследованию векторной задачи дифракции электромагнитной волны на экранах. Это задача дифракции электромагнитного поля на бесконечно тонких и идеально проводящих экранах, имеющих сложную геометрическую форму. Она сводится к векторному интегродифференциальному уравнению на поверхности экрана [1, 2] и решается численно с помощью проекционного метода.

Рассматриваемая задача является классической в электродинамике и активно решается с 1949 г. Использование в радиотехнике и электронике антенн и печатных плат сложной геометрической формы требует построения новых математических моделей для процессов распространения электромагнитных волн в таких устройствах. При этом возникла необходимость исследования нового широкого класса задач электродинамики, характеризующихся сложной геометрией и пространственным расположением. Многочисленные пакеты прикладных программ не позволяют получить эффективное решение данной задачи.

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием компьютерной техники. Это способствовало активному применению методов компьютерного моделирования для решения подобных задач на экранах канонической формы. Однако следует подчеркнуть, что проблема эффективного

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение № 14.В37.21.1950.

численного решения задач дифракции на тонких экранах в настоящее время, по-видимому, пока не решена даже с использованием самых мощных современных ЭВМ.

Для получения результатов задач на экранах сложной геометрической формы используются субиерархические методы [3–8], которые позволяют не производить повторные вычисления, связанные с формированием матричных элементов. Субиерархические методы эффективно используются совместно с параллельными вычислительными алгоритмами и реализуются на вычислительном кластере.

Постановка задачи

Пусть M – замкнутая не обязательно связанная поверхность в R^3 класса C^∞ . Пусть $\bar{\Omega} \subset M$, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$ ($i \neq j$) – объединение конечного числа связанных ориентированных незамкнутых и непересекающихся поверхностей класса C^∞ в R^3 . Край $\partial\Omega_j = \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ , сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j$.

Рассмотрим задачу дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω , расположенном в свободном пространстве с волновым числом $k, k^2 = \omega^2 \mu(\epsilon + i\sigma\omega^{-1}), \text{Im } k \geq 0$ ($k \neq 0$) (рис. 1).

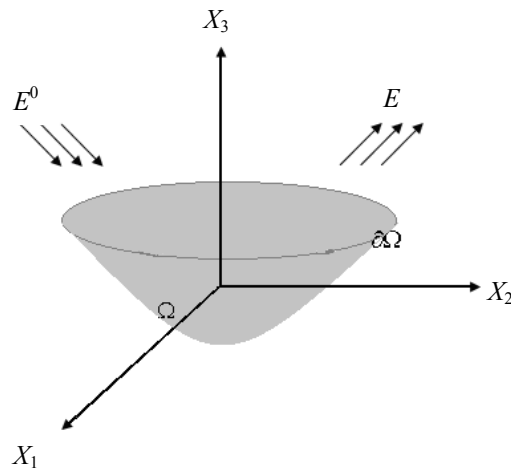


Рис. 1.

Данная задача сводится к векторному интегродифференциальному уравнению [1]

$$Lu := (\text{grad } A(\text{Div } u) + k^2 Au)|_t = f, \quad (1)$$

где A является интегральным оператором

$$Au = \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} u(y) ds, \quad (2)$$

$f := 4\pi k E_t^0|_{\Omega}$ и Div – это тангенциальная дивергенция на Ω . Здесь тангенциальный вектор u – так называемая поверхностная плотность тока.

Для изучения задачи дифракции на экране Ω введем векторное пространство распределений W .

Положим для любого вещественного s [9]

$$H^s(\Omega) := \{u|_{\Omega} : u \in H^s(R^2)\},$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{u \in H^s(R^2) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}.$$

Скалярное произведение и норма в $H^s(R^2)$ определяются обычным образом

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = (u, u)_s; \quad \langle \xi \rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}.$$

Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по R^2 . $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ является (замкнутым) подпространством $H^s(R^2)$ с индуцированными скалярным произведением и нормой. Далее $H^s(\Omega) = H^s(R^2) / \tilde{H}^s(\bar{\Omega})$; в $H^s(\Omega)$ вводится скалярное произведение и норма факторпространства. Пространства $H^{-s}(\Omega)$ и $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ антидвойственны друг к другу при всех $s \in R$; $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ можно получить замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $H^s(R^2)$ [9].

В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$ и т.д. При этом H^s в записи $u \in H^s$ уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_s = (u_1, v_1)_s + (u_2, v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = \|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, так как во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Определим гильбертово пространство $W = W(\bar{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_W^2 = \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\xi \cdot \hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_W = \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \left(\xi \cdot \hat{u}(\xi) \left(\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} \right) \right) d\xi,$$

где $\hat{u}$ обозначает преобразование Фурье распределения u , и пространство $W' := (W(\bar{\Omega}))'$ антидвойственно к W .

Определение [10]. Волновое число k является нерезонансным, если уравнение $L(k)u = 0$ имеет только тривиальные решения.

Утверждение [10]. Если k является нерезонансным и $k \neq 0$, тогда оператор $L(k): W \rightarrow W'$ является непрерывно обратимым.

Решение задачи на экране канонической формы

Рассмотрим n -мерное пространство $V_n \subset W$. Будем проводить аппроксимации u элементами $u_n \in V_n$. Методом Галеркина находим u_n из системы уравнений

$$(Au_n, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_n. \quad (3)$$

Эти уравнения определяются конечномерным оператором $A_n: V_n \rightarrow V'_n$, где V'_n есть антидуальное пространство к V_n .

Допустим, что подпространства X_n и Y_n являются линейными оболочками базисных и тестовых функций $X_n = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$, $Y_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Представим u_n в виде линейной комбинации базисных функций

$$u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k$$

и подставим это выражение в формулу (3). В результате получим эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений порядка n

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Az_k, v_j) = (f, v_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

относительно неизвестных коэффициентов γ_k .

Построим равномерную сетку на экране канонической формы. Под фигурой канонической формы для рассматриваемой задачи будем понимать

прямоугольный параллелепипед, разбитый на элементарные параллелепипеды Π_i . Элементами сетки (конечными элементами) будут являться грани элементарных параллелепипедов (рис. 2).

Носителем базисных функций будут всевозможные пары конечных элементов, имеющих общее ребро. На рис. 3 изображены всевозможные носители, которые могут быть образованы одним ребром. Их количество равно шести. Всего вариантов ребер три – это ребра, параллельные оси OX , OY , OZ . Число носителей, образующих шаблон, равно 18.

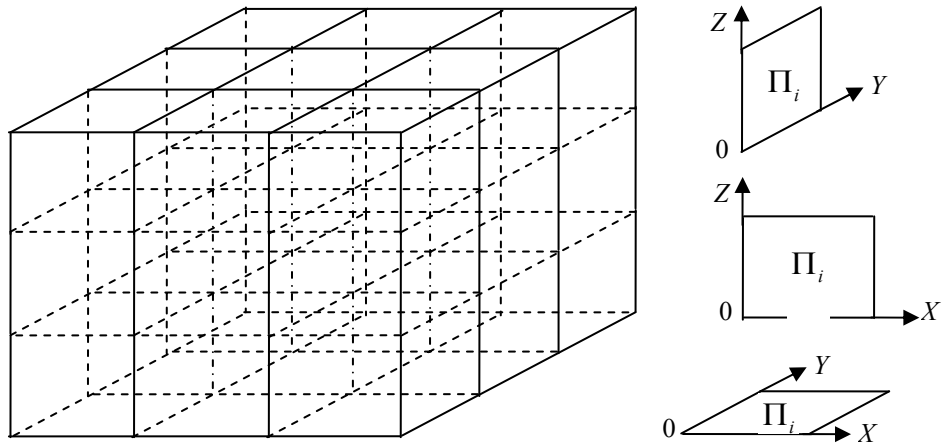


Рис. 2

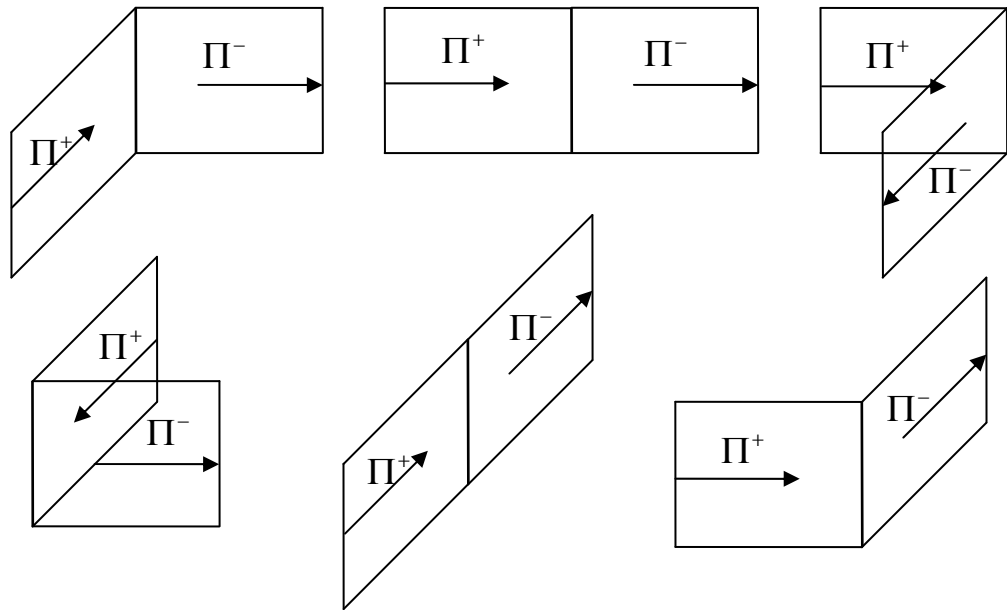


Рис. 3

Базисную функцию $\varphi_j(x, y, z)$, отвечающую ребру j , определим по правилу

$$\varphi_j(x, y, z) = \begin{cases} \left(x - x_1^{(j)}, y - y_1^{(j)}, z - z_1^{(j)} \right) \frac{l_j}{S_j^+} \text{ в } \Pi_j^+, \\ \left(x_2^{(j)} - x, y_2^{(j)} - y, z_2^{(j)} - z \right) \frac{l_j}{S_j^-} \text{ в } \Pi_j^- \end{cases} \quad (5)$$

и $\varphi_j \equiv 0$ вне прямоугольников Π_j^+, Π_j^- . Здесь l_j – длина j -го ребра; $S_j^\pm$ – площадь прямоугольника $\Pi_j^\pm$; C_j – середина ребра с номером j .

Отметим несколько важных свойств функций φ_j . Нормирование функций $\varphi_j(x, y, z)$ выполнено так, что нормальная составляющая (к ребру) этих функций в середине ребра равна 1, т.е. $(\varphi_j)_n(C_j) = 1$. Нормальные составляющие функции на границе $\partial\Pi_j$ носителя $\Pi_j = \Pi_j^+ \cup \Pi_j^-$ равны нулю, $(\varphi_j)_n|_{\partial\Pi_j} = 0$. Функции $\varphi_j(x, y, z)$ являются поверхностными сеточными функциями, т.е. как минимум одна из ее компонент равна нулю.

Следуя схеме метода Галеркина (3), можно получить решение интегрального уравнения на экране канонической формы. Для этого составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на базе элементов экрана сложной геометрической формы. Каждый элемент СЛАУ рассчитывается путем вычисления четырехкратного интеграла

$$A_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j) = - \int_{\Omega} G(x, y) \operatorname{div} \varphi_i(x) \operatorname{div} \bar{\varphi}_j(y) ds + k^2 \int_{\Omega} G(x, y) \varphi_i(x) \bar{\varphi}_j(y) ds$$

по паре носителей Π_i и Π_j . Здесь $G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}$ – известная функция Грина. Правая часть СЛАУ определяется падающим полем $f_j = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_j ds$, $j = 1, \dots, N$. Система линейных алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов.

Применение субиерархического метода в задаче электромагнитных волн на неплоских экранах сложной геометрической формы

Рассмотрим алгоритм построения решения для задачи дифракции на неплоских экранах сложной геометрической формы. Будем предполагать, что в нашем распоряжении находится базовая матрица, составленная при решении задачи на экране канонической формы одним из проекционных методов. Для решения задачи дифракции на экране сложной формы необходимо, чтобы данная поверхность целиком принадлежала экрану канонической формы, для которого матрица уже насчитана. Используя субиерархический метод, можно построить матрицу для экрана сложной формы, пользуясь элементами посчитанной матрицы, составленной при решении задачи на экране канонической формы. Для этого создадим вектор, описывающий геометрию фигуры W .

Далее, используя процедуру «выделения», описанную в [3], опишем геометрию нового экрана.

Следует заметить, что метод работает и в случае использования в качестве базового экрана не только экрана канонической формы. В этом случае на экран сложной конфигурации налагается то же условие, что и раньше: он должен целиком принадлежать базовому экрану. Таким образом, один раз решив задачу на экране базовой формы, мы можем использовать полученные результаты для решения серии задач на экранах сложной геометрической формы. Данный подход имеет большое практическое значение в инженерных расчетах.

На рис. 4 представлен еще один экран сложной геометрической формы, на котором производился расчет поверхностных токов. Рассматриваемый экран имеет форму уголка и состоит из двух плоских перпендикулярных квадратных платин размером $\lambda \times \lambda$, соединенных между собой ребром. Здесь λ – длина волны, $k_0 = 2\pi / \lambda$. На рис. 5 представлены расчеты модулей поверхностных токов. Для удобства восприятия и визуализации значения поверхностных токов на экране уголкового экрана разложили в форме пластины размером $2\lambda \times \lambda$.

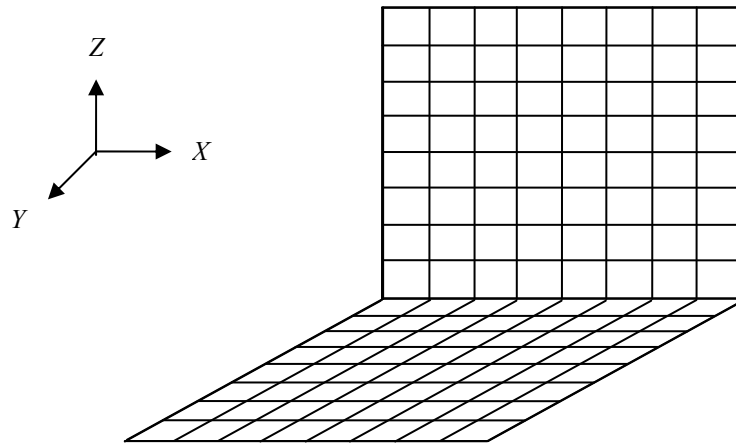


Рис. 4

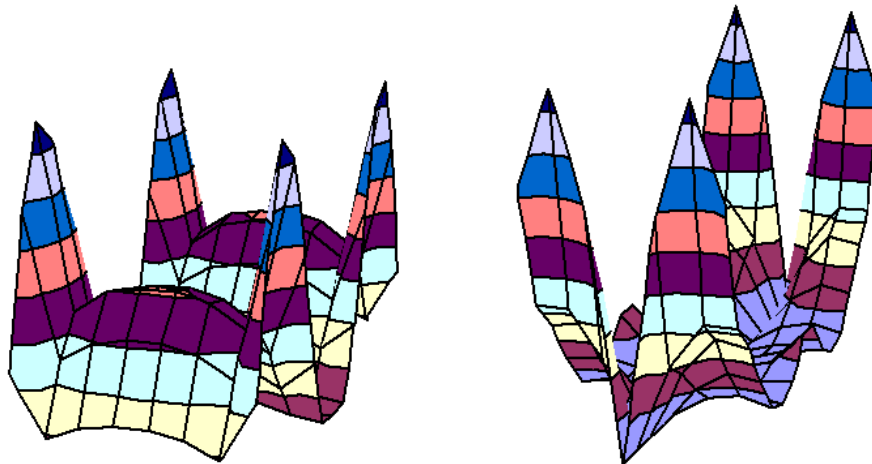


Рис. 5

Построенная модель представляет интерес при расчете печатных плат и многослойных структур. Для решения рассматриваемой задачи использовался суперкомпьютерный комплекс Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

1. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996. – 177 с.
2. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998. – 160 с.
3. **Медведик, М. Ю.** Применение субиерархического метода в задачах электродинамики / М. Ю. Медведик // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 87–97.
4. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
5. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. – 2004. – № 5. – С. 5–19.
6. **Антонов, А. В.** Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 60–67.
7. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 4. – С. 441–446.
8. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 3. – С. 281–290.
9. **Трибель, Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
10. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2009. – 268 с.
11. **Hänninen, I.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions / I. Hänninen M., Taskinen and J. Sarvas // Prog. Electromagn. Res. PIER. – 2006. – V. 63. – P. 243–278.
12. **Смирнов, Ю. Г.** О разрешимости векторных интегродифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитного поля на экранах произвольной формы / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 10. – С. 1461–1475.
13. **Rao, S. M.** Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape / S. M. Rao, D. R. Wilton and A. W. Glisson // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – V. Ap-30. – P. 409–417.
14. **Смирнов, Ю. Г.** О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и о решении уравнения электриче-

ского поля / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 129–139.

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.6

Медведик, М. Ю.

Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на неплоских экранах сложной геометрической формы с использованием базисных функций крышек / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 12–20.